CON IL PATROCINIO DELLA REGIONE PIEMONTE

DEL COMUNE DI TORINO

E

DELL'ASSOCIAZIONE SUBALPINA MATHESIS

GARA DI MATEMATICA PER IL PUBBLICO

Sermig – Venerdì 13 novembre 2020

Problema 1 – La potenza del quadrato **20 punti**

Un quadrato che ha il lato che misura 2^{2020} *cm* viene diviso in 16 quadrati uguali. Calcola l'area, in *cm*^{2}, di uno dei quadratini espressa come potenza di 2 ed indica il relativo esponente.

Soluzione:

L'area del quadrato misura 2^{4040} *cm*^{2} . *L'area di un quadratino sarà* 1/16 *di quella del quadrato grande, quindi varrà, in cm*^{2}, $2^{4040}/16 = 2^{4040}/2^4 = 2^{4036}$. **Risposta** $\boxed{4036}$

Problema 2 – Capodanno 25 punti

Calcola la somma di:

$$2020^3 - 2020 \cdot 2019^2 - 2020^2 \cdot 2019 + 2019^3$$

Soluzione:

Poniamo $x = 2020$. *Otteniamo:* $x^3 - x(x-1)^2 - x^2(x-1) + (x-1)^3$.

Semplificando si ha $2x - 1 = 4040 - 1 = 4039$.

Risposta $\boxed{4039}$

Problema 3 – Vero o falso? 25 punti

Fra le seguenti sei affermazioni, quante sono vere?

a) 1361 è un numero primo

b) la Regina d'Inghilterra oggi a pranzo ha mangiato la minestra

c) la somma dei primi *n* numeri dispari è uguale al quadrato di *n*

d) solo due fra le affermazioni precedenti a questa sono vere

e) l'affermazione *b* è falsa

f) solo tre fra le affermazioni precedenti a questa sono vere

Soluzione:

Le affermazioni a) e c) sono vere, mentre le altre dipendono da b).

Supponendo che b) sia vera allora sarebbero false la d) e la e) e, di conseguenza, la f) sarebbe vera.

Supponendo invece che b) sia falsa allora sarebbero vere la d) e la e) e, di conseguenza, la f) sarebbe falsa.

In entrambi i casi le affermazioni vere, fra quelle proposte, sarebbero in tutto 4.

Risposta $\boxed{0004}$

Problema 4 – L'albergo di Hilberto 25 punti

Il signor Hilberto è proprietario di un grande albergo le cui camere sono tutte da 4 letti. Quando una numerosa comitiva raggiunge l'albergo, il signor Hilberto riempie tutte le sue stanze ma non riesce a trovare posto per 6 clienti che è costretto a rifiutare. Il signor Hilberto decide quindi di fare un investimento per aumentare la capienza della struttura, acquistando dei nuovi arredi che consentano di aggiungere un posto letto ad ognuna delle stanze. Qualche settimana più tardi, alla riapertura della struttura dopo i lavori, arriva una comitiva più numerosa della precedente e l'albergo riesce ad ospitare tutti i clienti riempiendo completamente molte camere e lasciandone ancora 14 vuote. Qual è il numero minimo di stanze dell'albergo?

Soluzione:

Si indichino con x il numero di stanze, con y il numero di clienti della prima comitiva e con z il numero di clienti della seconda comitiva.

Poiché con 4 *letti per camera* 6 *clienti della prima comitiva rimangono senza posto, si ha:*

$$4x = y - 6.$$

Poiché con 5 *letti per camera si ospita per intero la seconda comitiva avanzando ulteriori* 14 *camere, si ha:*

$$5(x - 14) = z.$$

Dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} 4x = y - 6 \\ 5(x - 14) = z \end{cases}$$

si ottiene

$$y = \frac{4z + 310}{5}.$$

Siccome $z > y$ *allora*

$$5z > 4z + 310$$

da cui

$$z > 310.$$

Poiché z è multiplo di 5*, la minima soluzione del sistema corrisponde a*

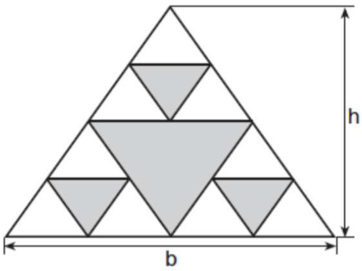
$$\begin{cases} z = 315 \\ y = 314. \\ x = 77 \end{cases}$$

L'albergo di Hilberto possiede quindi almeno 77 *stanze.*

Risposta $\boxed{0077}$

Problema 5 – Bersaglio a triangoli 30 punti

In questo strano bersaglio per le freccette i triangoli bianchi valgono 1 punto, quelli piccoli grigi 3 punti, quello grigio grande 5 punti. Qual è la probabilità di totalizzare 14 punti con quattro lanci consecutivi (si assuma che tutte le freccette colpiscano il bersaglio)? Si dia come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre dopo la virgola.



Soluzione:

Si nota che i triangoli piccoli, bianchi o neri, sono equiestesi, mentre il triangolo grande ha un'area 4 *volte maggiore degli altri citati. In totale si può dedurre che ogni triangolino valga* 1/16 *dell'area del bersaglio intero, quindi che la probabilità di essere colpito sia appunto* 1/16. *Ora, per totalizzare* 14 *punti in quattro lanci consecutivi, le possibilità sono solo due: ottenere, in tutti gli ordini possibili,* 1+3+5+5 *oppure* 3+3+3+5. *La prima situazione ha* 4!/2! = 12 *possibilità di realizzazione, mentre la seconda ne ha* 4!/3! = 4. *Otteniamo* $\frac{9}{16}\times\frac{3}{16}\times\frac{4}{16}\times\frac{4}{16}\times 12=\frac{324}{16^3}$ *per la prima e* $\left(\frac{3}{16}\right)^3\times\frac{1}{4}\times 4=\frac{27}{16^3}$ *per la seconda. Poiché gli eventi sono incompatibili, la probabilità richiesta sarà:*

P = (324 + 27) / 4096 = 0,085693359… **Risposta** $\boxed{0856}$

Problema 6 – Serie cervellotica 30 punti

Trovare il numero intero successivo della seguente serie:

3, 3, 3, 7, 6, 3, 5, 4, 4, 5

Soluzione:

Si osservi che gli elementi della serie indicano il numero di lettere (alfabeto italiano) che formano il nome dei primi dieci interi (zero escluso). L'undicesimo elemento sarà quindi il 6, *numero di lettere della parola "UNDICI".*

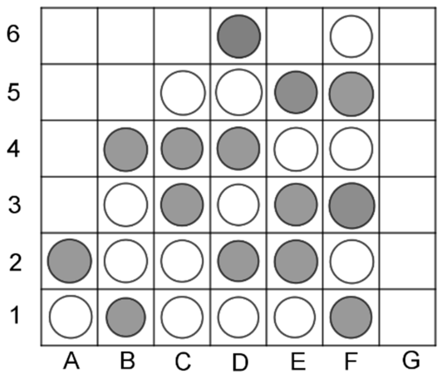
Risposta $\boxed{0006}$

Problema 7 – Giochiamo a “Forza 4” ! 30 punti

L’elemento principale del gioco è rappresentato dalla scacchiera. Questa è composta da una struttura di plastica all’interno della quale sono presenti dei binari che vincolano le pedine in una **determinata colonna**.

Si gioca in due. Il totale delle pedine per ciascun giocatore è di 21 elementi, mentre la scacchiera ha 6 righe e 7 colonne (vedi figura). Lo scopo del gioco si sostanzia nel tentativo di effettuare una linea di **4 pedine consecutive** - orizzontalmente, verticalmente oppure obliquamente - facendole scendere dall’alto verso il basso, a caduta, nei vari binari. Ovviamente questo risultato deve essere raggiunto anticipando l’avversario e soprattutto impedendo a lui di realizzare la combinazione in anticipo.

Bruno e Giorgio giocano a “Forza 4”. Bruno ha pedine bianche e Giorgio grigie. Ad un certo istante la situazione è come in figura sotto:



Bruno ha la prossima mossa, ma è destinato a perdere. Tenendo conto che i due sono buoni giocatori, in quante mosse, al massimo, Giorgio vincerà? Si comunichi il numero totale delle pedine di Bruno utilizzate dall’inizio della partita e fino al momento della sconfitta.

Soluzione:

Poiché chi è costretto a coprire per primo la casella A3 *è destinato a perdere (e può comunque difendere utilizzando le colonne diverse dalla* A*), essendoci ancora* 14 *caselle libere, ma* 4 *sono nella colonna* A*, Bruno sarà costretto ad occupare per primo quella casella. Avrà fin lì utilizzato* 20 *pedine.*

Risposta $\boxed{0020}$

Problema 8 – Willy Wonka **40 punti**

Una fabbrica di cioccolato imbusta 250000 tavolette, identiche fra loro, di cioccolato e all'interno di una di esse aggiunge un biglietto fortunato. Le tavolette vengono poi inscatolate a blocchi di 500 all'interno di 500 scatole di cartone, anch'esse identiche fra loro, le quali vengono caricate su un furgone per essere portate ad un ipermercato.
L'addetto allo scarico della merce sa che tutte le tavolette hanno lo stesso peso e che tutte le scatole hanno pure lo stesso peso, ma che il biglietto fortunato rende leggermente più pesante la tavoletta e quindi la scatola che la contiene.
Avendo a disposizione una bilancia a due piatti e potendo aprire le scatole di cartone (ma non le tavolette di cioccolato) qual è il minimo numero di pesate che dovrà effettuare per essere certo di trovare la tavoletta contenente il biglietto fortunato?

Soluzione:

Ponendo un ugual numero di tavolette (e/o di scatole piene) sui due piatti della bilancia si ottiene una fra tre informazioni: il peso del primo piatto può essere maggiore, minore o uguale al peso del secondo; questo indica se il biglietto si trova fra le tavolette sul primo piatto, fra quelle del secondo oppure fra quelle non pesate.
Comunque l'addetto scelga di suddividere le scatole e le tavolette, con 11 *sole pesate sarebbe in grado di individuare il biglietto in mezzo al massimo* $3^{11} = 177147$ *tavolette, mentre con* 12 *pesate potrebbe individuarlo anche in mezzo a* $3^{12} = 531441$ *tavolette.*
Con ogni pesata è infatti sufficiente suddividere le tavolette da confrontare in tre parti il più possibili uguali in numero; due di queste parti avranno lo stesso numero di tavolette e si potranno confrontare tra loro. Dalla pesata si individua la parte che contiene il biglietto e che quindi va ancora esaminata.
Poiché $3^6 = 729 > 500$*, un possibile procedimento utilizza* 6 *pesate per individuare la scatola, quindi altre* 6 *pesate per individuare la tavoletta "fortunata":*

1. *Dividere* 500 *in gruppi da* 166 *e da* 167*;*
2. *dividere il rimanente in gruppi da* 55 *e da* 56*;*
3. *quindi in gruppi da* 18 *e da* 19*;*
4. *quindi in gruppi da* 6 *(ed eventualmente da* 7*);*
5. *quindi in gruppi da* 2 *(ed eventualmente da* 3*);*
6. *infine in gruppi da* 1.

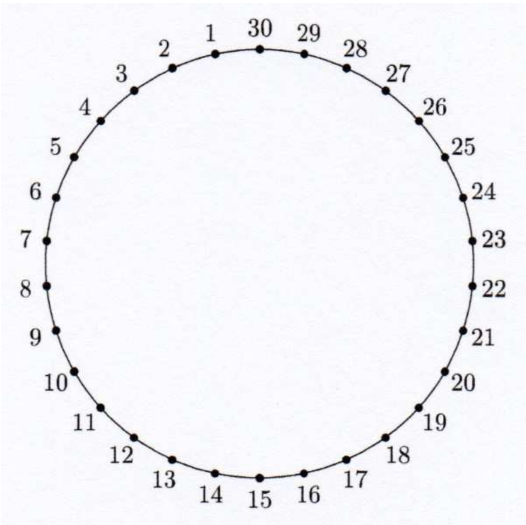
Risposta $\boxed{0012}$

Problema 9 – Ascensore aleatorio **40 punti**

Riccardo va a trovare Elisa, ma non ricorda a quale dei 30 piani (escluso il pianterreno dove non ci sono appartamenti) dell'edificio deve recarsi. Ricorda che i venditori porta a porta salgono all'ultimo piano, quindi scendono a piedi, un piano dopo l'altro, passando così per tutti i piani.
Sentendosi fortunato, decide però di salire ad un piano a caso: *se non è quello giusto scendo a piedi e se arrivo al pianterreno senza trovarlo, poco male: riprendo l'ascensore fino all'ultimo piano e poi scendo a piedi per i piani rimanenti.*
Mediamente a quanti diversi piani (escluso sempre il pianterreno) si recherà? Esprimere la soluzione arrotondata al centesimo e moltiplicata per 100.

Soluzione:

Rappresentiamo i piani da 1 *a* 30 *come punti ordinati su una circonferenza.*



Qualunque sia il piano al quale abita Elisa, Riccardo sceglierà un piano a caso e percorrerà la circonferenza in verso orario (se supera il primo piano continua infatti al trentesimo). Siccome sia il piano al quale abita Elisa, sia il primo piano a cui si reca Riccardo sono due a caso dei 30 *piani della circonferenza, il piano che Riccardo incontra nel suo cammino hanno la stessa probabilità di essere* 1, 2, 3, …, 28, 29 *oppure* 30. *Il numero di piani che Riccardo incontra nel suo cammino ha quindi come media:*

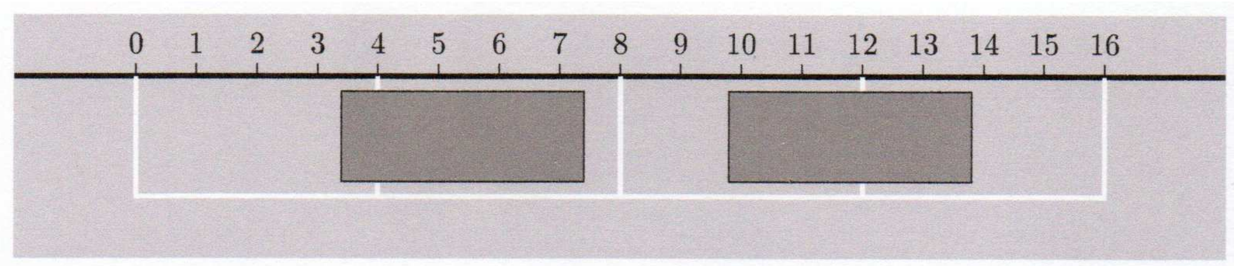
$$\frac{1+2+3+...+29+30}{30}=\frac{\frac{30\cdot 31}{2}}{30}=\frac{31}{2}=15{,}50.$$

Risposta $\boxed{\textbf{1550}}$

Problema 10 – Parcheggi selvaggi **40 punti**

La villetta dove abitano Gisella, Mario e Olivia ha un parcheggio interno lungo 16 metri; ciascuno di loro possiede un'automobile lunga 4 metri.

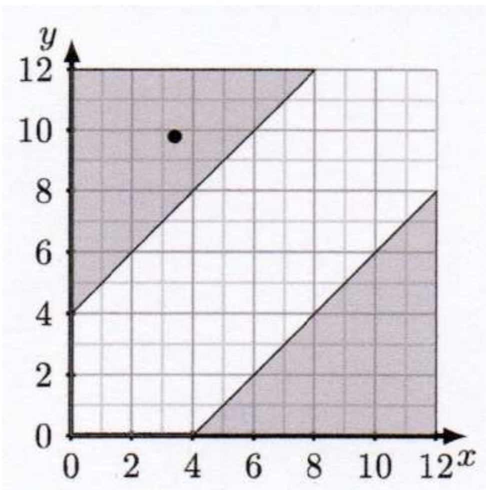
Mario e Olivia rientrano dal lavoro e posteggiano prima di Gisella. *"Ė inaccettabile!"* - esclama Gisella - *"Ci sarebbe posto per quattro macchine eppure, parcheggiando le loro due, Mario e Olivia non hanno lasciato spazio per la mia automobile."*



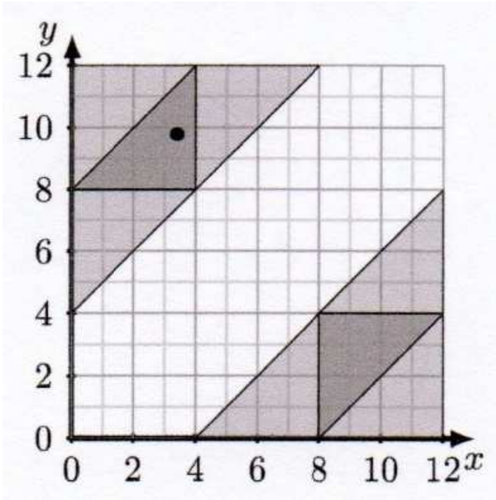
Gisella sa che i suoi vicini non agiscono con malizia: entrambi mettono contemporaneamente le auto a caso in due qualunque posizioni (non sovrapposte) entro quei 16 metri. Qual è la probabilità che così facendo non lascino spazio per una terza macchina? Rispondere con le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità (e non tener conto delle difficoltà di manovra per posteggiare le auto…!).

Soluzione:

Indichiamo con x e y la distanza tra l'estremo di sinistra del parcheggio e l'estremo di sinistra di ciascuna macchina. Mario e Olivia posteggiano all'interno del parcheggio, quindi $0 \le x,y \le 12$*; inoltre ciascuno evita incidenti con l'altra macchina, quindi* $|x-y| \ge 4$ *. I posteggi (casuali) di Mario e Olivia corrispondono ai punti nelle regioni grigie in figura, con area totale* $\frac{8 \cdot 8}{2} + \frac{8 \cdot 8}{2} = 64$ *(la configurazione che ha trovato Gisella è indicata da un punto evidenziato).*



Gisella riuscirebbe a parcheggiare a sinistra se $x, y \geq 4$*; riuscirebbe a parcheggiare a destra se* $x, y \leq 8$*; riuscirebbe a parcheggiare tra le due se* $|x - y| \geq 8$*. I casi in cui non ha spazio corrispondono alle regioni in grigio scuro (figura sotto) con area totale* $\frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} = 16$.



Dunque la probabilità di ricadere nelle regioni in grigio scuro, ovvero al rapporto fra le aree è

$$P = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = 0{,}2500$$

Risposta $\boxed{2500}$

Problema 11 – Scopone Scientifico 45 punti

Breve descrizione: si gioca con un mazzo di 40 carte (qui immaginiamo francesi o genovesi), 9 carte per giocatore, 4 in tavola. I *segni* sono Cuori, Quadri, Fiori e Picche. Gli unici punti sono le scope e i 4 punti di mazzo (Settebello, Primiera, Denari, Carte), si manda a monte se le carte in tavola all'inizio sono 3 o 4 re oppure se la somma dei valori delle quattro carte iniziali in tavola è minore di 11.
Si gioca a coppie (4 giocatori in totale). Il mazziere dà le carte e si gioca in senso antiorario. Si fa "scopa" quando si prendono tutte le carte in tavola in un colpo solo, punto non assegnato se ciò avviene con l'ultima carta/giocata (del mazziere). Le carte assumono valori numerici (non di punteggio) al fine di "prendere" in tavola: 1 (asso), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (fante), 9 (donna), 10 (re).
In una mano (o "smazzata") quanti punti al massimo una squadra può realizzare?

Soluzione:

Supponiamo che le carte siano distribuite in maniera che il primo giocatore abbia le stesse carte (nel senso di stesso "valore") del secondo e il terzo abbia carte analoghe a quelle del quarto (mazziere). Se in tavola ci sono ad esempio quattro "3" ed il primo giocatore, inopinatamente (forse perché ha due "6"), prende con un suo "6" due "3", perde scopa dal secondo giocatore e così via (qualunque carta cali il terzo giocatore il quarto ha l'analoga). La coppia avversaria del mazziere perde così ben 17 *punti (di scopa). Aggiungendo i quattro punti di mazzo, la squadra vincitrice realizza in totale* 21 *punti. Vincerebbe quindi immediatamente la partita poiché, in generale, il confronto termina quando una delle due squadre raggiunge o supera per prima proprio i* 21 *punti.*
In modo analogo potrebbe succedere se in tavola ci fossero quattro "4", quattro "5", due "6" e due "2", ecc.

Risposta $\boxed{0021}$

Problema 12 – Caso 2020 per l'ispettore di M. Smullyan 45 punti

In un caso di furto sono coinvolti quattro imputati, A, B, C, D. Vengono accertati i seguenti quattro fatti:

1) Se A e B sono entrambi innocenti, allora C è colpevole.
2) Se D è colpevole, allora o C fu suo complice oppure A è innocente.
3) Se D è innocente, allora B è colpevole.
4) Se almeno uno fra A e C è colpevole, allora B è innocente.

Alla luce dei suddetti fatti, calcolare la probabilità P(B) che B sia colpevole.

Si ipotizzi l'equiprobabilità degli eventi elementari che verranno individuati.

Dare come risposta la parte intera di $1000 \times P(B)$.

Soluzione:
Formalizziamo dapprima le frasi.
Si intenda A = "A è colpevole" , ecc. 0 = FALSO
¬ A = "A è innocente", ecc. 1 = VERO
Avremo:

1) $[(\neg A) \wedge (\neg B)] \rightarrow C$
2) $D \rightarrow (C \vee \neg A)$
3) $\neg D \rightarrow B$
4) $(A \vee C) \rightarrow \neg B$

Costruiamo la tavola di verità:

									1ª		2ª	3ª		4ª
	A	**B**	**C**	**D**	**nA**	**nB**	**nD**	**nA∧nB**	**(nA∧nB)→C**	**C∨nA**	**D→(C∨nA)**	**nD→B**	**A∨C**	**(A∨C)→nB**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	**0**	1	**1**	**0**	0	**1**
2	**0**	**0**	**0**	**1**	1	1	0	1	**0**	1	**1**	**1**	0	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**0**	1	1	1	1	**1**	1	**1**	**0**	1	**1**
4	**0**	**0**	**1**	**1**	1	1	0	1	**1**	1	**1**	**1**	1	**1**
5	**0**	**1**	**0**	**0**	1	0	1	0	**1**	1	**1**	**1**	0	**1**
6	**0**	**1**	**0**	**1**	1	0	0	0	**1**	1	**1**	**1**	0	**1**
7	**0**	**1**	**1**	**0**	1	0	1	0	**1**	1	**1**	**1**	1	**0**
8	**0**	**1**	**1**	**1**	1	0	0	0	**1**	1	**1**	**1**	1	**0**
9	**1**	**0**	**0**	**0**	0	1	1	0	**1**	0	**1**	**0**	1	**1**
10	**1**	**0**	**0**	**1**	0	1	0	0	**1**	0	**0**	**1**	1	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	0	1	1	0	**1**	1	**1**	**0**	1	**1**
12	**1**	**0**	**1**	**1**	0	1	0	0	**1**	1	**1**	**1**	1	**1**
13	**1**	**1**	**0**	**0**	0	0	1	0	**1**	0	**1**	**1**	1	**0**
14	**1**	**1**	**0**	**1**	0	0	0	0	**1**	0	**0**	**1**	1	**0**
15	**1**	**1**	**1**	**0**	0	0	1	0	**1**	1	**1**	**1**	1	**0**
16	**1**	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0	**1**	1	**1**	**1**	1	**0**

Poiché i fatti (1), (2), (3), (4) *sono stati accertati (quindi supposti veramente accaduti), considerando quindi solo le righe (in rosso su sfondo giallo) della tabella corrispondenti alle situazioni in cui tutte le* 4 *frasi hanno valore di verità* 1, *si nota che, nei riguardi di* B, *si hanno* 2 *casi "*1*" su* 3 *complessivi (considerati "equiprobabili", date le nostre informazioni). La probabilità cercata è quindi* P(B) = 2/3 = 0,666… *da cui* 1000 × P(B) = 666,666... **Risposta** $\boxed{0666}$

Problema 13 – Treno sotto la pioggia 50 punti

Carla è seduta nello scompartimento di un treno che viaggia alla velocità di 72 *km/h* lungo un tratto rettilineo. Guardando fuori dal finestrino vede delle gocce di pioggia, che scendono a velocità costante, con componenti v_x =16 *m/s* (con verso contrario a quello del treno) e v_y= 3,0 *m/s*.
Quanto vale la velocità, in *m/s* delle gocce di pioggia misurata da un osservatore che si trova a terra?

Soluzione:

Poiché il treno viaggia con v_x =20 m/s e v_y= 0 m/s, per chi è fermo a terra (trascurando segni negativi per le componenti varie) la componente orizzontale della velocità pioggia sarà di 4 m/s e la componente verticale sarà sempre di 3,0 m/s. Deduciamo che la velocità delle gocce di pioggia sarà di 5,0 m/s. **Risposta** $\boxed{0005}$

Problema 14 – Gioco a dadi 50 punti

Archimede sta giocando a dadi con i suoi amici. Il gioco consiste nel lanciare due dadi identici con lo stesso numero di facce. Si vince solo se escono due facce identiche, cioè riportanti lo stesso numero. Gli amici propongono, per rendere il gioco più accattivante, di aggiungere un terzo dado. Ora, per vincere, bisognerà che su tutti e tre i dadi esca la stessa faccia. Qualcuno però fa notare che con queste nuove regole la probabilità di vincere è molto più bassa che con le vecchie regole. Archimede, dopo aver riflettuto un attimo, mette tutti a tacere dicendo: "Se giochiamo con le regole nuove ma utilizziamo tre dadi che hanno 12 facce in meno di quelli con cui abbiamo giocato finora, allora la probabilità di vincere al nuovo gioco sarà esattamente uguale a quella di prima". Dato per scontato che Archimede abbia ragione, quante facce avevano i due dadi del gioco iniziale? Si tenga presente che la forma dei dadi non dev'essere necessariamente quella di un poliedro regolare (solido platonico), ma le facce devono essere congruenti fra loro.

Soluzione:

Indichiamo con n il numero di facce dei due dadi del gioco.

Nella prima versione del gioco la probabilità di vincere è $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n = \frac{1}{n}$.

Nella seconda versione la probabilità diventa $\left(\frac{1}{n-12}\right)^3 \cdot (n-12) = \frac{1}{(n-12)^2}$.

Poiché la probabilità deve rimanere la stessa, occorre risolvere l'equazione: $\frac{1}{(n-12)^2} = \frac{1}{n}$*, la quale si riduce a* $n^2 - 25n + 144 = 0$*, che ha come soluzioni* $n = 9$ *e* $n = 16$*. La soluzione* $n = 9$ *non è accettabile (non potremmo togliere 12 facce), mentre* $n = 16$ *funziona, perché nella nuova versione del gioco i dadi avrebbero* $16 - 12 = 4$ *facce.*

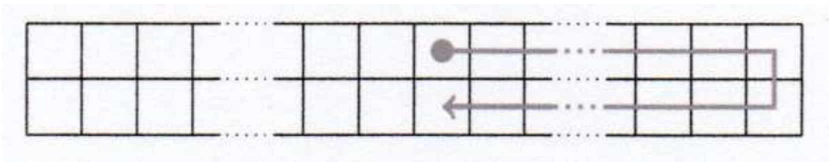
Risposta $\boxed{0016}$

Problema 15 – Strada di mattonelle **50 punti**

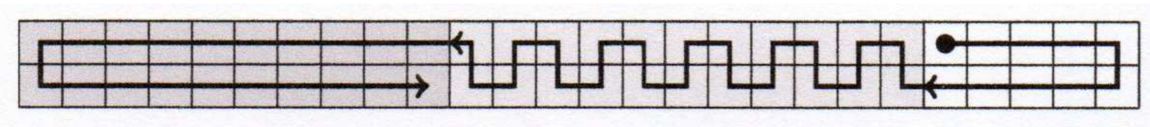
Cento mattonelle quadrate sono disposte su due file a formare un rettangolo. In quante diverse maniere è possibile costruire un percorso che parta da una qualunque casella, proceda passando ogni volta ad una casella adiacente in verticale o in orizzontale e tocchi una ed una sola volta tutte le caselle? Si tenga conto anche del verso di percorrenza.

Soluzione:

Qualunque sia la casella iniziale, il percorso dovrà necessariamente iniziare, come illustrato nell'immagine, procedendo in direzione longitudinale (verso destra o verso sinistra) fino alla fine del rettangolo e ritornando indietro parallelamente.



A meno che il percorso sia partito da una delle quattro caselle d'angolo e si sia già concluso, può continuare prima con una greca (alternando mosse orizzontali e verticali), poi nuovamente con due lunghi tratti longitudinali, come illustrato in figura sotto.



I diversi percorsi sono tanti quanti le possibili lunghezze (longitudinali) della greca, dunque per ogni casella, contando le partenze in entrambi i versi, ci sono $50 - 1 = 49$ *possibili percorsi.*
Contando questi 49 *percorsi per ciascuna delle* 100 *caselle di partenza e aggiungendo i* 4 *percorsi "tutti longitudinali" il numero di percorsi possibili risulta essere*

$$49 \cdot 100 + 4 = 4904$$

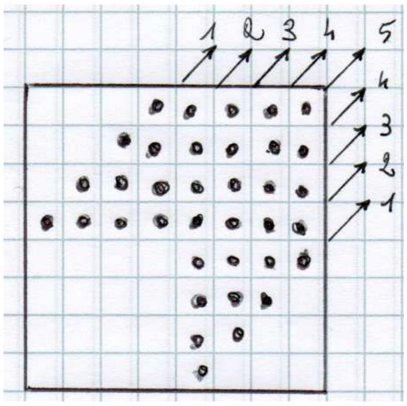
Risposta $\boxed{4904}$

Problema 16 – Un cellulare da sbloccare **70 punti**

Antonella deve sbloccare il cellulare di suo fratello. Il metodo di accesso consiste nel toccare 4 punti consecutivi di una griglia 8×8. Antonella si ricorda che i quattro punti vanno collegati in orizzontale, in verticale o in diagonale, ma non si ricorda né l'ordine né il verso giusto. Quanti tentativi dovrà fare al massimo per sbloccare il telefono?

Soluzione:

Ci sono 8 × 5 *sequenze di* 4 *punti consecutivi disposti in orizzontale e altrettante in verticale.*
Le sequenze in diagonale sono disposte su due quadrati di dimensione 5 × 5 *(comprendenti le diagonali che vanno da nord-ovest e sud-est e quelle che vanno da nord-est a sud-ovest). Tenendo conto che ogni sequenza può essere percorsa in due versi diversi (quelle orizzontali da sinistra a destra o viceversa, quelle verticali dall'alto verso il basso o viceversa, ecc.), in totale le possibilità sono* $[(8 \times 5) \times 2 + 2 \times (5 \times 5)] \times 2 = 260$.
Il fatto che le sequenze in diagonale siano 100 *lo si può dedurre anche considerando la figura sotto. Qui sono indicate alcune sequenze in direzione (Sud-Ovest)-(Nord-Est). Partendo dalla diagonale minore a quella maggiore si hanno in totale* $(1+2+3+4) \times 2 + 5 \times 2 = 50$. *Contando anche quelle in direzione (N-O)-(S-E), ne totalizziamo* 100.



Risposta $\boxed{0260}$

Problema 17 – Calcolo enigmatico 2020 **75 punti**

ABC	−	DE	=	FC
×		:		+
G	×	C	=	DE
HCE	:	G	=	ABC

A lettera uguale corrisponde cifra uguale (e a lettera diversa cifra diversa).

La prima cifra non è mai lo zero (come semplicità comanda).

Quale numero corrisponde alla stringa AHGB?

Soluzione:

Si trova subito **E = 0** *e* **A = 1** *(somma verticale). Si evince pure che uno fra* G *e* C *vale* 5 *e l'altro è pari (prodotto orizzontale).*

Supponiamo che sia G = 5.

Se è C = 2 *abbiamo* D = 1 *(prodotto orizzontale),* F = 9 *(somma verticale), da cui* B = 0 = E*: non accettabile.*

Se è C = 4 *abbiamo* D = 2, F ≥ 8*, da cui* B = 0 *oppure* B = 1 = A*: non accettabile.*

Se è C = 6 *abbiamo* D = 3, F ≥ 7*, da cui* B = 2 *quindi* F = 9*, ma in questo caso non "quadrano" più il prodotto verticale e la divisione orizzontale.*

Se è C = 8 *abbiamo* 5 × B – 4 = 8 *che implica* B *non intero (prodotto verticale): non accettabile.*

Quindi è **C = 5** *e* G *pari.*

Se è G = 2 *abbiamo* D = 1*: non accettabile.*

Se fosse G = 4 *non funzionerebbe il prodotto verticale (questione di riporti: si tenga conto che* C *è dispari).*

Se è **G = 6** *abbiamo* **D = 3**, F ≥ 7*, da cui* **B = 2** *quindi* **F = 9***, inoltre* **H = 7** *(prodotto verticale), soluzione accettabile e unica. Infatti l'assunzione di* G = 8 *(da cui* D = 4*) implicherebbe la non realizzazione del prodotto verticale (causa riporti).*

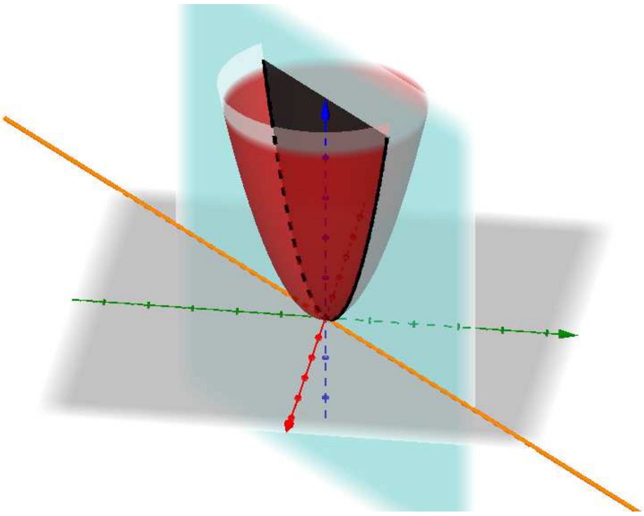
Risposta $\boxed{1762}$

Problema 18 – Parabola rotante 85 punti

Una parabola, riferita al piano cartesiano yOz, di vertice O e passante per P(1,1), ruota (in senso orario o antiorario) attorno all'asse z di un angolo α. La sua proiezione sul piano yz di partenza passa per Q(1,2). Considerando il riferimento ortonormale calcolare la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo α (valore minimo positivo).

Soluzione:

L'equazione della parabola nel piano di riferimento è $z = y^2$. *La sua proiezione cercata avrà equazione* $z = 2y^2$.
La rotazione della suddetta parabola genera, nello spazio tridimensionale, un paraboloide rotondo. Aggiungendo l'asse x al riferimento iniziale otteniamo l'equazione (paraboloide) $z = x^2 + y^2$ *(vedi figura).*



Dobbiamo trovare un piano, passante per l'asse z, che tagli il paraboloide in modo da individuare la sezione richiesta. L'equazione del piano sarà del tipo y = ax, con a numero reale. Abbiamo quindi il sistema:

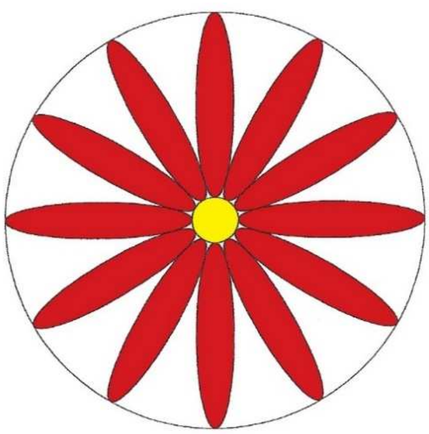
$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = ax \end{cases}$ *, da cui* $z = (a^2 + 1) y^2$. *Dovrà essere* $a^2 + 1 = 2$. *Otteniamo a* = ± 1.

Poiché è a = tg *α, l'angolo minimo positivo richiesto vale* 45°.

Risposta **0045**

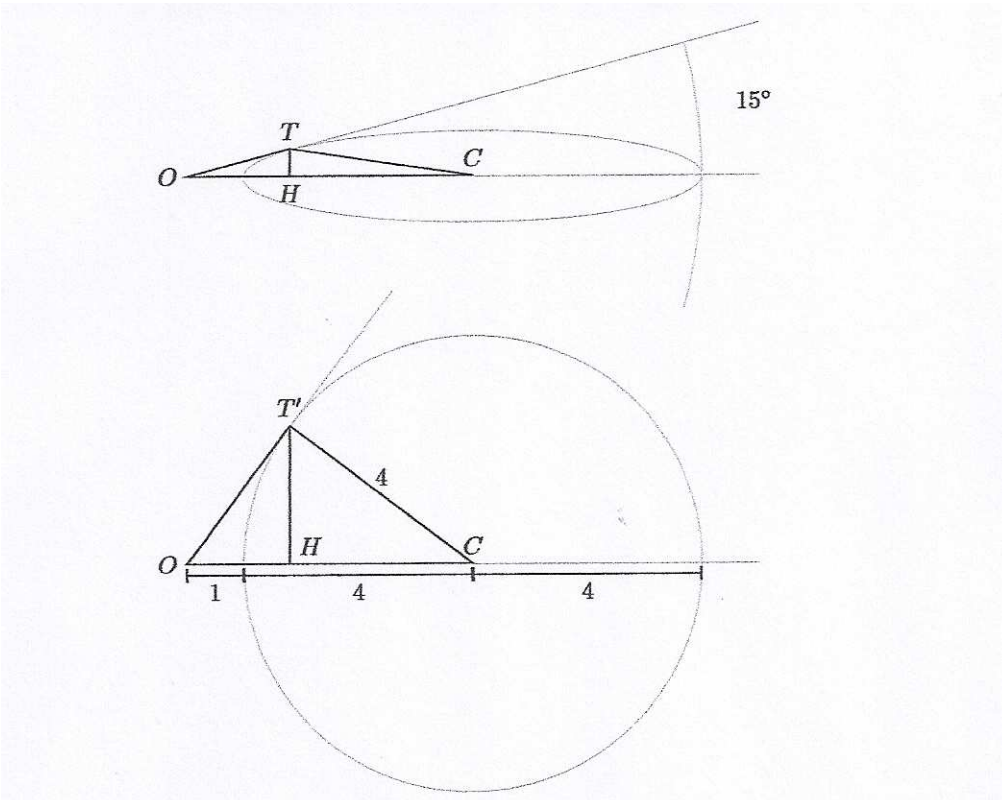
Problema 19 – Margherita 90 punti

Elisa disegna un fiore: dapprima traccia due circonferenze concentriche di raggi rispettivamente 1 e 9, quindi, cercando di ottenere la massima simmetria possibile, aggiunge 12 ellissi tangenti ad entrambe le circonferenze e anche fra di loro (vedi figura). A che distanza dal centro del fiore si trovano i punti di tangenza tra due petali? Indicare nella soluzione le prime quattro cifre del valore trovato, omettendo la virgola.



Soluzione:

L'angolo formato dal centro C di un'ellisse, dal centro O delle circonferenze e dal punto T di tangenza tra l'ellisse e la "successiva" è (vedi figure sotto) $T\hat{O}C = 15°$.
Dilatando il piano in direzione perpendicolare al raggio OC, possiamo trasformare l'ellisse in una circonferenza. La retta tangente all'ellisse in T si trasforma in una retta tangente alla circonferenza in T', perpendicolare al raggio CT'.



Del triangolo OCT, rettangolo in T, conosciamo l'ipotenusa $\overline{OC} = 5$ *e il cateto* $\overline{CT'} = 4$. *Possiamo allora ricavare il cateto* $\overline{OT'} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ *e la proiezione ortogonale di quest'ultimo sull'ipotenusa,* $\overline{OH} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$. *Infine* $\overline{TH} = \overline{OH} \cdot \tan 15°$, *dunque*

$$\overline{OT} = \sqrt{OH^2 + HT^2} = \frac{9}{5}\sqrt{1 + \tan^2 15°} = \frac{9}{5\cos 15°} = \frac{9}{5}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 1{,}863...$$

Risposta $\boxed{1863}$

Problema 20 – Stuzzicadenti 90 punti

In un contenitore cilindrico vi sono tre stuzzicadenti (uguali fra loro). La loro forma è quella di un cilindretto e le loro punte si possono interpretare come due piccoli coni retti (con basi coincidenti con le basi del cilindretto). Essi si sono incollati fra loro e sono tangenti ognuno agli altri due. L'altezza del contenitore e quella degli stuzzicadenti coincidono, pur non creando attriti fra le varie parti. Vi è ovviamente un foro di uscita a forma circolare, il quale è posto al centro della scatoletta. Tralasciando le unità di misura, si sa che il raggio del contenitore è 20, quello di ogni stuzzicadenti è 2 e quello del foro è 3.

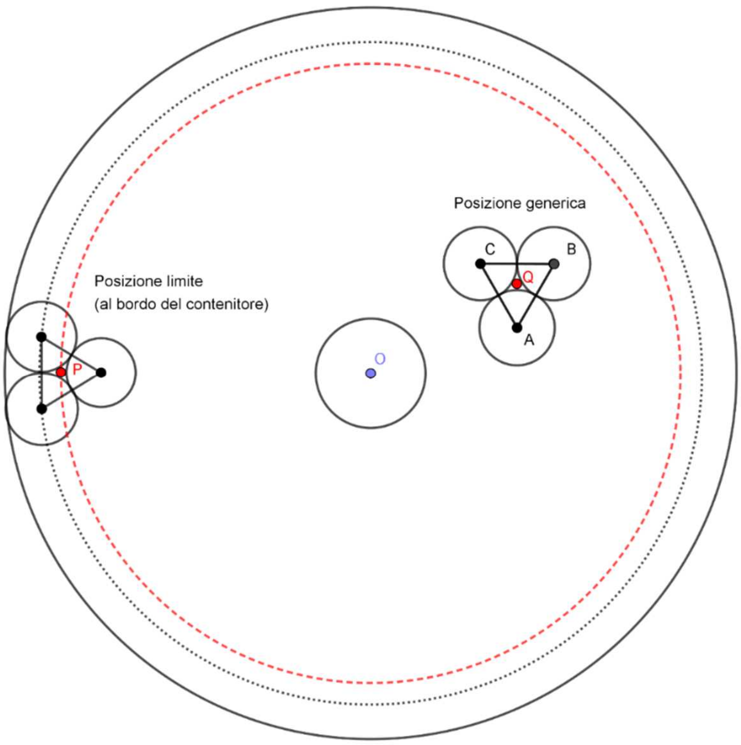
Dopo aver agitato il contenitore Pierino si chiede: qual è la probabilità che i tre stuzzicadenti si presentino in posizione (verticale) tale che la loro punta superiore si trovi all'interno (o sul bordo) del foro? Si supponga che la probabilità [infinitesima] che il centro della terna si trovi in qualsiasi posizione (centrale o vicina al bordo del contenitore) sia sempre la stessa.

Dare come risposta il numero formato dalle prime quattro cifre decimali del valore della suddetta probabilità.

Soluzione:

Ci serve un modello della situazione. Realizziamo la seguente figura 1 (contenitore visto dall'alto):

Fig. 1



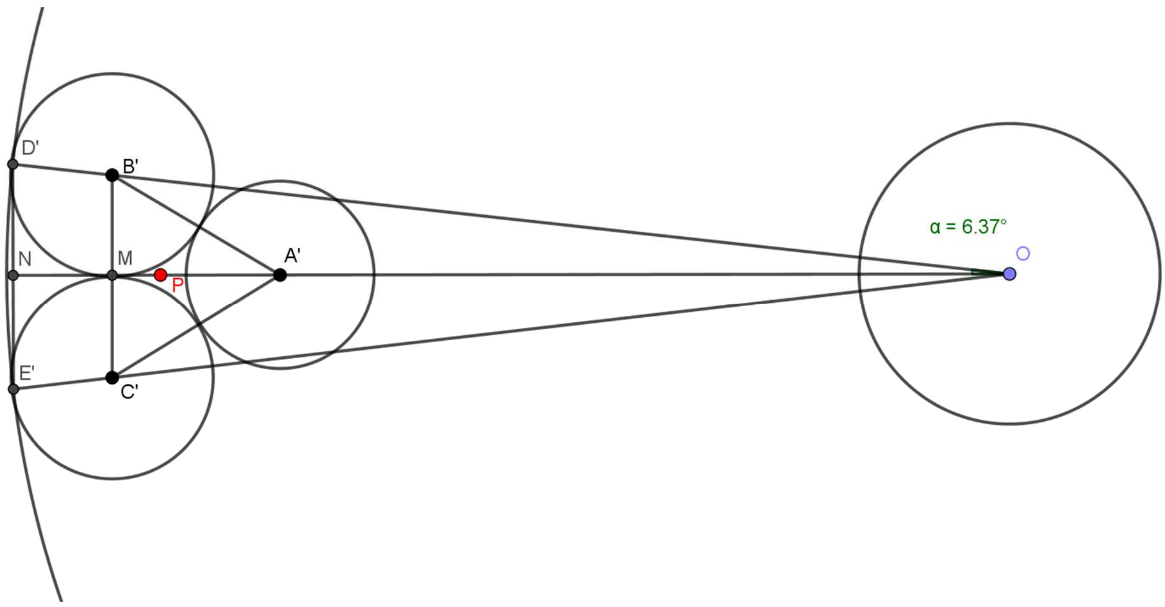
Congiungendo i centri dei cerchiolini che rappresentano la sezione trasversale degli stuzzicadenti otteniamo un triangolo equilatero. In figura P *e* Q *sono il centro del suddetto triangolo visto in varie posizioni.*

Utilizzando la "probabilità geometrica" dovremo calcolare il rapporto fra l'area del cerchio individuato dal centro del triangolo, mentre questi è tutto compreso nel foro circolare, e l'area del cerchio in cui può muoversi il suddetto centro: in figura il cerchio di raggio OP *(la cui circonferenza è tratteggiata in rosso).*

Cominciamo dall'area del cerchio "grande" di raggio OP.

Riferiamoci alla figura 2 qui sotto.

Fig. 2



Tracciamo i raggi OD' *e* OE' *i quali intersecano la circonferenza grande in* D' *e in* E'. *Tracciamo il segmento* D'E' *il quale incontra in* N *il raggio passante per* P, *mentre* M *è il punto di tangenza fra le circonferenze di centri* C' *e* B' *nonché di intersezione fra i segmenti* ON *e* B'C'.

Chiamiamo α l'angolo NÔD.

Sappiamo che è $\overline{\mathrm{ND'}} = \overline{\mathrm{NE'}} = 20\sin\alpha$, *nonché* $\overline{\mathrm{B'O}} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$. *Quindi:*

$\overline{\mathrm{OD'}} = \overline{\mathrm{B'O}} + 2 = 20$, *da cui* $\dfrac{2}{\sin\alpha} = 18$, *cioè* $\sin\alpha = \dfrac{1}{9}$ *e* $\alpha \cong 6{,}37°$.

Sarà dunque $\overline{\mathrm{MO}} = \overline{\mathrm{B'O}}\cos\alpha = 2\cot\alpha$, *quindi* $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{MO}} - \overline{\mathrm{MP}} = 2\cot\alpha - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. *Infatti il triangolo* A'B'C' *è equilatero ed il segmento* MP *è un terzo della sua altezza.*

Sappiamo pure che è $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. *Quindi, essendo palesemente* $0° < \alpha < 90°$*, otteniamo*

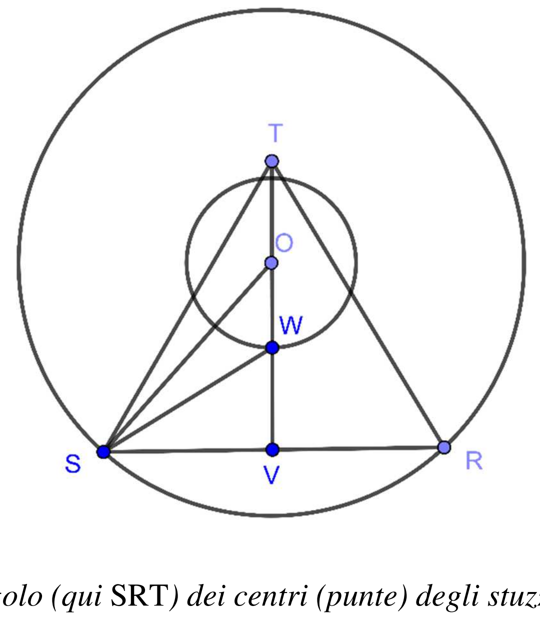
$\cot\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = \sqrt{81-1} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. *Avremo* $\overline{\mathrm{OP}} = 8\sqrt{5} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{24\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3}$.

Posto A_1 *= Area cerchio di centro* P *e raggio* $\overline{\mathrm{OP}}$*, troviamo:*

$$A_1 = \left(\frac{24\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi = \frac{2880+12-96\sqrt{15}}{9}\pi = \frac{2892-96\sqrt{15}}{9}\pi = \frac{963-32\sqrt{15}}{3}\pi \cong 280{,}021511\pi .$$

Per quanto riguarda l'area occupata dal centro del triangolo rispetto al foro riferiamoci alla sottostante figura 3.

Fig. 3



La posizione limite del triangolo (qui SRT*) dei centri (punte) degli stuzzicadenti è quella per cui due dei suddetti centri sono sul bordo del foro. Il centro ulteriore (qui è indicato con* W*) del triangolo che ci interessa descrive un cerchio (massimo possibile) di raggio* OW *del quale dobbiamo trovare la misura.*

Abbiamo:

$$\overline{\mathrm{WV}} = \sqrt{\overline{\mathrm{SW}}^2 - \overline{\mathrm{SV}}^2} = \sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{3} - 4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \qquad \overline{\mathrm{OV}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OS}}^2 - \overline{\mathrm{SV}}^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{\mathrm{OW}} = \overline{\mathrm{OV}} - \overline{\mathrm{WV}} = \sqrt{5} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}08.$$

Area cerchio voluto $= \dfrac{\left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\right)^2}{9}\pi = \dfrac{57 - 12\sqrt{15}}{9}\pi = \dfrac{19 - 4\sqrt{15}}{3}\pi \cong 1{,}169355538\pi$

La probabilità cercata è quindi:

$$P = \left(\frac{19 - 4\sqrt{15}}{3}\pi\right) : \left(\frac{963 - 32\sqrt{15}}{3}\pi\right) = \frac{19 - 4\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{3}{963 - 32\sqrt{15}} = \frac{16377 - 3244\sqrt{15}}{912009} \cong 0{,}00418.$$

Risposta $\boxed{0041}$